Mathématiques **Année 2022-2023**

PCSI

Programme de colle : Semaine 22 (03/04 au 07/04)

Chapitre : Analyse asymptotique

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbf{R}$ ou $a = \pm\infty$. Lien entre ces relations.

Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées. Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O.

Equivalents usuels.

Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées

★ : Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \ln(\sqrt{1+\sin(x)}$ en $x = 0$

★ : Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} - 1$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$. Obtention d'un équivalent par encadrement Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

★ : Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\mathrm{e}^x)\sin(x)}{x^2+x^3}$.

Développements limités

Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.

Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a. Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$. Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp, \sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}, x \mapsto, \ln(1+x), x \mapsto \dfrac{1}{1-x}, x \mapsto (1+x)^\alpha$, arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan. Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction. Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente :

★ : Pour tout x tel que $|x| < \dfrac{1}{2}$, on pose $f(x) = \ln(1+x+x^2)\sqrt{1+2x}$. Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0, et préciser la position relative de C_f et de T au voisinage de 0.

détermination d'asymptotes.

★ : Montrer que la courbe représentative de f définie par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.

Relations de comparaison : cas des suites Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.

★ : Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.