PCSI

Programme de colle : Semaine 10 (05/12 au 09/12)

Chapitre 8 : Calculs de primitives et d'intégrales

Généralités : Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ où $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.

Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, inégalité triangulaire.

Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.

Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$,

Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Savoir reconnaitre les dérivées de fonctions composées.

Intégration par parties

Changement de variable : changement de variable dans une intégrale, cas des fonctions paires, impaires et périodiques.

★ : calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ + interprétation géométrique.

Applications : primitives de $x \mapsto \exp(ax)\cos(bx)$ et $x \mapsto \exp(ax)\sin(bx)$, primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, utilisation de la linéarisation

★ : Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$$

Etablir que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite positive et décroissante.

Chapitre 9 : Suites numériques

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.

Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.

Suites extraites

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

★ : Déterminer le terme général de la suite u définie par : $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 9$.

★ : Étudier les variations de la suite v définie par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+1} = v_n^2$.

★ : Étudier les variations de la suite w qui est définie implicitement par les équations $\mathrm{e}^x + nx = 0$ (pour $n \in \mathbf{N}^*$) d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

Compléments sur l'ensemble des nombres réels : valeur décimale approchée, borne supérieure d'une partie de $\mathbf{R}$ non vide et majorée.

Limites de suites : convergence d'une suite vers une limite $\ell \in \mathbf{R}$, le réel ℓ est unique.

★ : Preuve de l'unicité de la limite

divergence d'une suite vers $\pm\infty$.

Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ

passage à la limite dans les inégalités larges.

Théorème d'encadrement, théorème de majoration, de minoration.

★ : Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$ converge et déterminer sa limite.

Opérations sur les limites.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.