Mathématiques **Année 2022-2023**

PCSI

Programme de colle : Semaine 11 (12/12 au 16/12)

Chapitre 8 : Calculs de primitives et d'intégrales

★ : Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t$$

Etablir que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite positive et décroissante.

Chapitre 9 : Suites numériques

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.

Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.

Suites extraites

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

★ : Déterminer le terme général de la suite u définie par : $u_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 9$.

★ : Étudier les variations de la suite v définie par $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+1} = v_n^2$.

★ : Étudier les variations de la suite w qui est définie implicitement par les équations $\mathrm{e}^x + nx = 0$ (pour $n \in \mathbf{N}^*$) d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

Compléments sur l'ensemble des nombres réels : valeur décimale approchée, borne supérieure d'une partie de $\mathbf{R}$ non vide et majorée.

Limites de suites : convergence d'une suite vers une limite $\ell \in \mathbf{R}$, le réel ℓ est unique.

★ : Preuve de l'unicité de la limite

divergence d'une suite vers $\pm\infty$.

Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ

passage à la limite dans les inégalités larges.

Théorème d'encadrement, théorème de majoration, de minoration.

★ : Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$ converge et déterminer sa limite.

Opérations sur les limites. Théorème de la limite monotone.

★ : Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

Suites adjacentes ; théorème des suites adjacentes.

★ : Étude de la convergence de la suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Étude d'une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Intervalle stable par une fonction f . Étude du cas particulier où f est croissante/décroissante. Si f est continue et que u converge vers une limite $\ell \in \mathbf{R}$, alors par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$; ℓ est un point fixe de f.

Chapitre 10 : Équations différentielles linéaires [COURS UNIQUEMENT]

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (EDL1)

— Résolution d'une EDL1 homogène (ou sans second membre).
— Principe de superposition.
— Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL1

- Méthode de la variation de la constante pour résoudre une équation avec second membre non nul.
- Problème de Cauchy.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.