Mathématiques **Année 2022-2023**

PCSI

Programme de colle : Semaine 13 (16/01 au 20/01)

Chapitre 10 : Équations différentielles linéaires

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 (EDL1)

- Résolution d'une EDL1 homogène (ou sans second membre).
- Principe de superposition.
- Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL1
- Méthode de la variation de la constante pour résoudre une équation avec second membre non nul.
- Problème de Cauchy.

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 (EDL2) à coefficients constants

- Résolution d'une EDL2 à coefficients constants homogène (ou sans second membre) dans $\mathbf{C}$ ou dans $\mathbf{R}$.
- Principe de superposition.
- savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme : $x \mapsto P(x)$ où P est un polynôme ; $x \mapsto \kappa e^{\delta x}$ où $(\kappa, \delta) \in \mathbf{K}^2$; $x \mapsto \kappa \cos(\omega x)$ ou $x \mapsto \kappa \sin(\omega x)$ où $(\kappa, \omega) \in \mathbf{R}^2$.
- Problème de Cauchy.

★ : Résoudre $\mathrm{ch}(t)y' + \mathrm{sh}(t)y = \mathrm{ch}^2(t)$ sur $\mathbf{R}$.

★ : Résoudre $y'' + 4y' - 5y = -e^{2x}$ sur $\mathbf{R}$.

Chapitre 11 : Limites et continuité

limite : définitions Unicité de la limite.

Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a. Limite à droite, limite à gauche. Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Passage à la limite d'une inégalité large. Existence d'une limite par encadrement , par minoration ,par majoration. Théorème de la limite monotone.

Continuité en un point Continuité, prolongement par continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Continuité sur un intervalle Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.

★ : Montrer que $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

★ : Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\cos(x)}{x^2+1}$;

★ : Déterminer si f_1 est prolongeable par continuité $f_1 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ en 0 ;

★ : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x^3 & \text{sinon} \end{cases}$ Montrer sa continuité sur $\mathbf{R}$.

★ : Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$. Montrer que f admet un point fixe.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.