PCSI

Programme de colle : Semaine 16 (06/02 au 10/02)

Chapitre 11 : Limites et continuité

limite : définitions Unicité de la limite.

Si f possède une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a. Limite à droite, limite à gauche. Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie). Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Passage à la limite d'une inégalité large. Existence d'une limite par encadrement , par minoration ,par majoration. Théorème de la limite monotone.

Continuité en un point Continuité, prolongement par continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Continuité sur un intervalle Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone.

Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Image d'un segment par une fonction continue.

Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réciproque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.

Extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité pour les fonctions à valeurs complexes.

Chapitre 12 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

Opérations sur les matrices : Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires. Matrices élémentaires. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires. Produit matriciel ; bilinéarité, associativité. Symbole de Kronecker. Produit de matrices élémentaires.

Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.

Opérations élémentaires : Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel. (matrices de dilatation, de permutation et de transvection)

Systèmes linéaires : Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé. Système compatible. Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé. Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Algorithme du pivot.

Ensemble des matrices carrées : Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Matrice identité, matrice scalaire. Matrices symétriques, antisymétriques. Formule du binôme de Newton Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures. Matrice inversible, inverse. Inverse d'une transposée. Inverse d'un produit de matrices inversibles.

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires (méthode de Gauss Jordan) ou par résolution du système $AX = Y$.

Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

★ : Résoudre le système

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & m \\ x & + & my & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbf{C}^3$ où $m \in \mathbf{C}$ est un paramètre.

★ : On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$. En déduire que A est inversible et la valeur de A^{-1}.

★ : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $P \in GL_n(\mathbf{K})$, alors $\forall k \in \mathbf{N}$ $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$.

★ : On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Inverser P, calculer $P^{-1}AP$ et en déduire A^n pour $n \in \mathbf{N}^*$. (on ne fera pas la calcul de A^n).

Chapitre 13 : Arithmétique[COURS et applications directes]

Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans Z, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne. PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.

PPCM. Algorithme d'Euclide. Nombre premier.

★ : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.

Les congruences ne sont pas au programme

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.