PCSI

Programme de colle : Semaine 18 (06/03 au 10/03)

Chapitre 13 : Arithmétique

Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans Z, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne. PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.

PPCM. Algorithme d'Euclide. Nombre premier.

★ : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.

Les congruences ne sont pas au programme

Chapitre 14 : Dérivation

Nombre dérivé, fonction dérivée Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraine la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. développement limité à l'ordre 1 en a.

★ : Montrer que $f : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ se prolonge en une fonction dérivable en 0.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.

Extremum local et point critique Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.

★ : Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, |\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x-y|$.

Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et si $\lim_{x\to a, x\neq a} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Extension au cas où $\ell = +\pm\infty$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

★ : Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la dérivée n-ième de $f : x \mapsto (x+2)\mathrm{e}^{2x}$.

★ : Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Fonctions convexes :

définition. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables. Exemples d'inégalités de convexité.

★ : Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$.

★ : Montrer que $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}], \dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

Fonctions à valeurs complexes Brève extension des définitions et résultats précédents. Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire. Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.