Mathématiques **Année 2022-2023**

PCSI

Programme de colle : Semaine 19 (13/03 au 17/03)

Chapitre 14 : Dérivation

Nombre dérivé, fonction dérivée Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraine la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. développement limité à l'ordre 1 en a.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.

Extremum local et point critique Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.

Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et si $\lim_{x\to a, x\neq a} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Extension au cas où $\ell = +\pm\infty$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$

Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Fonctions convexes :

définition. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables. Exemples d'inégalités de convexité.

Fonctions à valeurs complexes Brève extension des définitions et résultats précédents. Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire. Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.

Chapitre 15 : Polynômes

Ensemble $\mathbf{K}[X]$.

Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.

Ensemble $\mathbf{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.

Degré d'une somme, d'un produit. Le produit de deux polynômes non nuls est non nul. Composition.

Divisibilité et division euclidienne Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.

★ : Effectuer la division euclidienne de $X^3 - 3X^2 + 3X + 1$ par $X - 2$.

★ : Soit $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$. Déterminons la division euclidienne de $A = X^4 + aX^2 + bX + c$ par $B = X^2 + X + 1$.

★ : Montrer que : $X^2 - 2X | (X-1)^4 + (X-1)^2 - 2$.

★ : Déterminer tous les P de degré 3 tels que $P(0) = P(1) = P(2) = 0$.

Fonctions polynomiales et racines Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.

Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.

Dérivée formelle d'un polynôme. Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

$\bigstar$: Soit $(\theta, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X\sin(\theta) + \cos(\theta))^n$ par $X^2 + 1$

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.