PCSI

Programme de colle : Semaine 20 (20/03 au 25/03)

Chapitre 15 : Polynômes

Ensemble $\mathbf{K}[X]$.

Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.

Ensemble $\mathbf{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.

Degré d'une somme, d'un produit. Le produit de deux polynômes non nuls est non nul. Composition.

Divisibilité et division euclidienne Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.

★ : Effectuer la division euclidienne de $X^3 - 3X^2 + 3X + 1$ par $X - 2$.

★ : Soit $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$. Déterminons la division euclidienne de $A = X^4 + aX^2 + bX + c$ par $B = X^2 + X + 1$.

★ : Montrer que : $X^2 - 2X | (X - 1)^4 + (X - 1)^2 - 2$.

Fonctions polynomiales et racines Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.

Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.

Dérivée formelle d'un polynôme. Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

★ : Soit $(\theta, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \sin(\theta) + \cos(\theta))^n$ par $X^2 + 1$

Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$. Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ ont même multiplicité.

Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.

Chapitre : Analyse asymptotique

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbf{R}$ ou $a = \pm\infty$. Lien entre ces relations.

Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées. Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O.

Equivalents usuels.

Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées

★ : Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \ln(\sqrt{1 + \sin(x)}$ en $x = 0$

★ : Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} - 1$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$. Obtention d'un équivalent par encadrement Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.