PCSI

Programme de colle : Semaine 21 (27/03 au 31/03)

Chapitre 15 : Polynômes

Ensemble $\mathbf{K}[X]$.

Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.

Ensemble $\mathbf{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.

Degré d'une somme, d'un produit. Le produit de deux polynômes non nuls est non nul. Composition.

Divisibilité et division euclidienne Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.

Fonctions polynomiales et racines Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.

Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.

Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.

Dérivée formelle d'un polynôme. Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$. Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ ont même multiplicité.

Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.

Chapitre : Analyse asymptotique

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbf{R}$ ou $a = \pm\infty$. Lien entre ces relations.

Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées. Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O.

Equivalents usuels.

Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées

★ : Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \ln(\sqrt{1+\sin(x)}$ en $x = 0$

★ : Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} - 1$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$. Obtention d'un équivalent par encadrement Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

★ : Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-\mathrm{e}^x)\sin(x)}{x^2+x^3}$.

Développements limités

Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.

Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a. Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$. Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp, \sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}, x \mapsto, \ln(1+x), x \mapsto \dfrac{1}{1-x}, x \mapsto (1+x)^\alpha$, arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan. Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction. Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente :

★ : Pour tout x tel que $|x| < \dfrac{1}{2}$, on pose $f(x) = \ln(1+x+x^2)\sqrt{1+2x}$. Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0, et préciser la position relative de C_f et de T au voisinage de 0.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.