Mathématiques **Année 2022-2023**

PCSI

Programme de colle : Semaine 23 (10/04 au 14/04)

Chapitre : Analyse asymptotique

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbf{R}$ ou $a = \pm\infty$. Lien entre ces relations.

Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées. Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O.

Equivalents usuels.

Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées

Obtention d'un équivalent par encadrement Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Développements limités

Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.

Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a. Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$. Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp, \sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}, x \mapsto, \ln(1+x), x \mapsto \dfrac{1}{1-x}, x \mapsto (1+x)^\alpha$, arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan. Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction. Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente :

Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0, et préciser la position relative de C_f et de T au voisinage de 0.

détermination d'asymptotes.

★ : Montrer que la courbe représentative de f définie par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.

Relations de comparaison : cas des suites Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.

★ : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$.

Chapitre : Espaces vectoriels

Définition, règles de calculs, espaces vectoriels de références : $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathcal{F}(I,\mathbf{K})$, $\mathcal{F}(E,F)$, $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{K}[X]$, $E \times F$.

Sous-espaces vectoriels : définition, critère(caractérisation) de sev,

intersection de sous-espaces vectoriels.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Combinaisons linéaires : définition

Familles finies de vecteurs : Familles génératrices , Familles libres, familles liées : définitions, propriétés. Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans K et de degrés échelonnés est libre.

★ : Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x = 2y\}$. Montrer que c'est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, dont on déterminera une famille génératrice.

Base d'un espace vectoriel, coordonnées d'un vecteur dans une base (matrice colonne), bases canoniques de $\mathbf{K}^n$, de $\mathbf{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

★ : Montrer que $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 \mid x+5y-z=0\}$ est un espace vectoriel, et déterminer une base de F_1 ;

COURS UNIQUEMENT :

Somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe Caractérisation par l'intersection.Sous-espaces supplémentaires.

Base adaptée à une somme directe.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.