PCSI

Programme de colle : Semaine 24 (02/05 au 05/05)

Chapitre : Espaces vectoriels

Définition, règles de calculs, espaces vectoriels de références : $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathcal{F}(I,\mathbf{K})$, $\mathcal{F}(E,F)$, $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{K}[X]$, $E \times F$.

Sous-espaces vectoriels : définition, critère(caractérisation) de sev,

intersection de sous-espaces vectoriels.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Combinaisons linéaires : définition

Familles finies de vecteurs : Familles génératrices , Familles libres, familles liées : définitions, propriétés. Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans K et de degrés échelonnés est libre. .

Base d'un espace vectoriel, coordonnées d'un vecteur dans une base (matrice colonne), bases canoniques de $\mathbf{K}^n$, de $\mathbf{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

★ : Montrer que $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid x + 5y - z = 0\}$ est un espace vectoriel, et déterminer une base de F_1 ;

Somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe Caractérisation par l'intersection.Sous-espaces supplémentaires (exemples avec les matrices symétriques/antisymétriques et fonctions paires/impaires).

Base adaptée à une somme directe.

★ : Montrer que $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.

★ : l'ensemble des fonctions paires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{K}$. Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(R,\mathbf{K})$.

★ : On considère le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(I,\mathbf{K})$ des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, où I désigne un intervalle non trivial de $\mathbf{R}$ centré en 0. On considère également deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I,\mathbf{K})$: $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires définies sur I et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires définies sur I . Montrer que

$$\mathcal{F}(I,\mathbf{K}) \;=\; \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}.$$

Chapitre : Espaces vectoriels en dimension finie

Dimension finie : définition, théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète.

Dimensions des espaces vectoriels : $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Dimension de $(E \times F)$.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille formée de n éléments. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$\mathcal{F}$ est une base de E $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est génératrice de E .

★ : Montrer que $((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Rang d'une famille finie de vecteurs d'un K-espace vectoriel de dimension quelconque. Caractérisation des familles finies libres, génératrices par le rang.

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.

★ : On considère le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E = \mathbf{R}^3$ et quatre vecteurs

$$\vec{u} = (1, 2, 3),\ \vec{v} = (2, -1, 1),\ \vec{w} = (1, 0, 1),\ \vec{x} = (0, 1, 1).$$

Montrer que $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{Vect}(\vec{w}, \vec{x})$.

Vocabulaire : droite vectorielle, plan vectoriel, hyperplan.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.