PCSI

Programme de colle : Semaine 25 (09/05 au 12/05)

Chapitre : Espaces vectoriels

Définition, règles de calculs, espaces vectoriels de références : $\mathbf{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathcal{F}(I,\mathbf{K})$, $\mathcal{F}(E,F)$, $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{K}[X]$, $E\times F$.

Sous-espaces vectoriels : définition, critère(caractérisation) de sev,
intersection de sous-espaces vectoriels.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.

Combinaisons linéaires : définition

Familles finies de vecteurs : Familles génératrices , Familles libres, familles liées : définitions, propriétés. Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans K et de degrés échelonnés est libre. .

Base d'un espace vectoriel, coordonnées d'un vecteur dans une base (matrice colonne), bases canoniques de $\mathbf{K}^n$, de $\mathbf{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe Caractérisation par l'intersection.Sous-espaces supplémentaires (exemples avec les matrices symétriques/antisymétriques et fonctions paires/impaires).

Base adaptée à une somme directe.

★ : Montrer que $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.

★ : l'ensemble des fonctions paires de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{K}$. Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(R,\mathbf{K})$.

★ : On considère le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(I,\mathbf{K})$ des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, où I désigne un intervalle non trivial de $\mathbf{R}$ centré en 0. On considère également deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I,\mathbf{K})$: $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires définies sur I et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires définies sur I . Montrer que

$$\mathcal{F}(I,\mathbf{K}) \;=\; \mathcal{P}\oplus\mathcal{I}.$$

Chapitre : Espaces vectoriels en dimension finie

Dimension finie : définition, théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète.

Dimensions des espaces vectoriels : $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Dimension de $(E\times F)$.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbf{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille formée de n éléments. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$\mathcal{F}$ est une base de $E \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ est génératrice de E .

★ : Montrer que $((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

Rang d'une famille finie de vecteurs d'un K-espace vectoriel de dimension quelconque. Caractérisation des familles finies libres, génératrices par le rang.

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.

★ : On considère le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E=\mathbf{R}^3$ et quatre vecteurs

$$\vec{u}=(1,2,3),\;\vec{v}=(2,-1,1),\;\vec{w}=(1,0,1),\;\vec{x}=(0,1,1).$$

Montrer que $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})=\mathrm{Vect}(\vec{w},\vec{x})$.

Vocabulaire : droite vectorielle, plan vectoriel, hyperplan.

Chapitre 19 : Applications linéaires

Applications linéaires, opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F, composition. Isomorphisme, réciproque.

★ : L'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

★ : L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Noyau, image : définitions.

Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $Im(u) = Vect(u(x_i))_{i \in I}$.

Application linéaire de rang fini. Le rang de $v \circ u$ est majoré par $min(rg(u), rg(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

Endomorphismes : définition. Identité, homothéties. Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.