PCSI

Programme de colle : Semaine 26 (15/05 au 17/05)

Chapitre : Espaces vectoriels

Chapitre : Espaces vectoriels en dimension finie

Dimension finie : définition, théorème de la base extraite, théorème de la base incomplète.

Dimensions des espaces vectoriels : $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Dimension de $(E \times F)$.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille formée de n éléments. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

$\mathcal{F}$ est une base de $E \Leftrightarrow \mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ est génératrice de E .

★ : Soient $n \in \mathbf{N}$, $E = \mathbf{K}_n[X]$ et $\mathcal{F} = (1, X+1, (X+2)^2, (X+3)^3, \ldots, (X+n)^n)$.

1. Justifier que $\mathcal{F}$ est une famille libre.
2. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E.

Rang d'une famille finie de vecteurs d'un K-espace vectoriel de dimension quelconque. Caractérisation des familles finies libres, génératrices par le rang.

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

Vocabulaire : droite vectorielle, plan vectoriel, hyperplan.

Chapitre 19 : Applications linéaires

Applications linéaires, opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F, composition. Isomorphisme, réciproque.

★ : L'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

★ : L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Noyau, image : définitions.

Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.

Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $Im(u) = Vect(u(x_i))_{i \in I}$.

Application linéaire de rang fini. Le rang de $v \circ u$ est majoré par $min(rg(u), rg(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

Endomorphismes : définition. Identité, homothéties. Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition

Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires. Caractérisations : $p \circ p = p$, $s \circ s = id_E$.

Automorphismes. Groupe linéaire.

★ : Montrer que l'endomorphisme p : $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z, -x+y+z, z) \end{array}$ est un projecteur dont on déterminera ses éléments..

Chapitre 20 : Dénombrement (Nous n'avons pas encore fait d'exercices en TD sur ce chapitre

Cardinal d'un ensemble fini : nombre de ses éléments, Notations $|A|$, Card(A).

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Listes et combinaisons

Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.

Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.