PCSI

Programme de colle : Semaine 27 (22/05 au 27/05)

Chapitre 19 : Applications linéaires

Applications linéaires, opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F, composition. Isomorphisme, réciproque.

Noyau, image : définitions.

Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $Im(u) = Vect(u(x_i))_{i\in I}$.

Application linéaire de rang fini. Le rang de $v \circ u$ est majoré par $min(rg(u), rg(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

Endomorphismes : définition. Identité, homothéties. Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition

Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires. Caractérisations : $p \circ p = p$, $s \circ s = id_E$.

Automorphismes. Groupe linéaire.

★ : Montrer que l'endomorphisme $p : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z, -x+y+z, z) \end{array}$ est un projecteur dont on déterminera ses éléments..

Chapitre 20 : Dénombrement

Cardinal d'un ensemble fini : nombre de ses éléments, Notations $|A|$, Card(A).

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Listes et combinaisons

Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.

Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.

Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Chapitre 21 : Probabilités(Nous n'avons pas encore fait d'exercices en TD sur ce chapitre)

Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités. On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles). définition d'une variable aléatoire.

Probabilité sur un univers fini. Espace probabilisé fini

Définition d'une distribution de probabilités Une probabilité est déterminée par la distribution de probabilités

Probabilité uniforme.

Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.

Probabilités conditionnelles Formule des probabilités composées

★ ; On considère un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 truqué de la manière suivante : la probabilité d'obtenir la face k (où $k \in [|1,4|]$) est proportionnelle à k. Déterminons la probabilité P.

★ : On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire avec remises 3 cartes. Quelle est la probabilité de n'avoir tiré aucun trèfle ?

★ : On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire sans remises 3 cartes. Quelle est la probabilité de n'avoir tiré aucun trèfle ?

★ : Une urne contient b boules blanches et n boules noires (avec $b, n \geq 1$). On y prélève sans remise les $b+n$ boules. Si $i \in [|1, b+n, —]$, on note A_i et B_i les événements

$$B_i : \ll \text{La } i^{\text{e}} \text{ boule tirée est blanche} \gg$$

et

$$A_i : \ll \text{On a tiré la première boule noire au } i+1^{\text{e}} \text{ tirage} \gg.$$

Déterminer $P(A_i)$.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.