Mathématiques **Année 2022-2023**

PCSI

Programme de colle : Semaine 28 (05/06 au 09/06)

Révisions : Applications linéaires

Chapitre 21 : Probabilités

Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités. On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles). définition d'une variable aléatoire.

Probabilité sur un univers fini. Espace probabilisé fini

Définition d'une distribution de probabilités Une probabilité est déterminée par la distribution de probabilités

Probabilité uniforme.

Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.

Probabilités conditionnelles

Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.

Loi d'une variable aléatoire Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E. La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in E}$.

Variable aléatoire $f(X)$.

Variables aléatoires usuelles

Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.

Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ Interprétation comme succès d'une expérience.

Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales. Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.

Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

Événements indépendants : Cas de deux événements. Extension au cas de n événements.

Variables aléatoires indépendantes

Si $X_1 \cdots , X_n$ sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Lemme des coalitions. Extension au cas de plus de deux coalitions.

Espérance : définition, c'est un indicateur de position. Variable aléatoire centrée. Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.

Formule de transfert.

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$. Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.

Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle. Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite. Relation $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Variable centrée réduite.

Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.

Covariance de deux variables aléatoires. Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées. Relation $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes.

Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.

Inégalité de Markov. Application à l'obtention d'inégalités de concentration. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

★ ; On considère un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 truqué de la manière suivante : la probabilité d'obtenir la face k (où $k \in [|1, 4|]$) est proportionnelle à k. Déterminons la probabilité P.

★ : On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire avec remises 3 cartes. Quelle est la probabilité de n'avoir tiré aucun trèfle ?

★ : On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire sans remises 3 cartes. Quelle est la probabilité de n'avoir tiré aucun trèfle ?

★ : Une urne contient b boules blanches et n boules noires (avec $b, n \geq 1$). On y prélève sans remise les $b+n$ boules. Si $i \in [|1, b+n,—]$, on note A_i et B_i les événements

$$B_i : \text{« La } i^{\text{e}} \text{ boule tirée est blanche »}$$

et

$$A_i : \text{« On a tiré la première boule noire au } i+1^{\text{e}} \text{ tirage ».}$$

Déterminer $P(A_i)$.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.