PCSI

**Programme de colle : Semaine 29 (12/06 au 16/06)**

**Révisions : Intégration**

★ : Chacun des étudiants sera interrogé sur un calcul d'intégrales

**Chapitre 22 : Applications linéaires Partie II** Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de $E$ de dimension finie et $(f_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de $F$, alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I, u(e_i) = f_i$.

Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.

**Si $E$ et $F$ ont même dimension finie alors une application linéaire de $E$ dans $F$ est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.**

Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.

Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ si $E$ et $F$ sont de dimension finie.

Applications linéaires de rang fini. Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.

**Théorème du rang.** Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si $S$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}u$ dans $E$, alors $u$ induit un isomorphisme de $S$ sur $\mathrm{Im}u$.

Formes linéaires et hyperplans.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

★ : Si $H$ est un hyperplan de $E$ et $D$ une droite non contenue dans $H$, alors $E = H \oplus D$.

Notion d'équation linéaire, i.e. de la forme $u(x) = a$ où $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $a \in F$.

L'ensemble des solutions est soit l'ensemble vide, soit de la forme $x_0+\mathrm{Ker}u$.

**Chapitre 23 : Matrices et applications linéaires**

Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base. Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

Matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

★ : Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ défini pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ par $f((x,y)) = (x+2y, 2x+2y)$. Montrer qu'il s'agit d'un automorphisme de $\mathbf{R}^2$ et donner l'expression de sa réciproque.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image et noyau d'une matrice. Rang d'une matrice A. Théorème du rang. Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang.

Les opérations élémentaires préservent le rang. Rang de la transposée.

★ : Déterminer le noyau, l'image et le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

COURS uniquement :

Matrice de passage d'une base à une autre. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

Tous les énoncés de propriétés et toutes les définitions sont à connaitre. Chacun des étudiants sera interrogé sur un exercice étoilé.